Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

Rapport du jury :
Il faut connaître les formules de Taylor et certains développements très classiques et surtout être capable de faire la différence entre les formules et de maîtriser leurs champs d'application. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent. De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives. Pour aller plus loin, on peut mentionner des applications en algèbre bilinéaire (lemme de Morse), en géométrie (étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique ou l'étude de consistance de l'approximation de d2dx2 par différences finies. On soignera particulièrement le choix des développements.

Développements :
- lemme de Morse
- TCL

Références :
- Petit guide du calcul différentiel, Rouvière
- Analyse, Gourdon
- Analyse, Rombaldi
- Analyse pour l'agrégation, Queffelec Zuily

Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

Soit U un ouvert de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_n)$ et $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

I. Comportement local de fonctions

1. Formule de Taylor-Young

Théorème 1 : (inégalité des accroissements finis) Soient $a, b \in U$ tels que $[a, b] \subset U$. Soit $f: U \to E$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$ $\|df(x)\|_{op} \leq M$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|_n$$

Théorème 2 : (Taylor-Young) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f: U \to E$ k fois différentiable en $a \in U$. Alors lorsque $h \to 0$ on a

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)h + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(a)(h, \ldots, h) + o(\|h\|_n^k)$$

Application 3 : (Darboux) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

2. Taylor-Young, base des développements limités

Proposition 4 : Si $f: I \to E$ est une application k fois dérivale en 0, alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre k suivant

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Exemples 5 : Développements limités usuels lorsque $x \to 0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Application 6 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x - e^y}{\sin x - \sin y} \to 1$ lorsque $y \to x$

3. Application à l'étude affine locale d'une courbe plane et d'une surface

Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I définissant un arc paramétré du plan. Soient t un point intérieur à I, $p \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $\vec{v} = \frac{\gamma^{(p)}(t)}{p!}$ soit non nul et q le plus petit entier strictement plus grand que p tel que $\vec{w} = \frac{\gamma^{(q)}(t)}{q!}$ ne soit pas colinéaire à $\vec{v}$.

On veut connaître l'aspect local de l'arc au voisinage du paramètre t.

Proposition 7 : Notons $A = \gamma(t)$ et $M = \gamma(t + h)$. Pour $h \to 0$ on a en utilisant la formule de Taylor-Young

$$\overrightarrow{AM} = X(h)\vec{v} + Y(h)\vec{w}$$

où $X(h) = h^p + o(h^p)$ et $Y(h) = h^q + o(h^q)$.

Proposition 8 : Les signes de X et Y au voisinage de 0 dépendent de la parité de p et q. De plus, la tangente en A à l'arc γ est la droite de direction $\gamma^{(p)}(t)$ passant par A.

Figure 9 : Annexe 1 (Représentation des 4 cas possibles)

Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$ et telle que $d^2 f(a)$ est non dégénérée.
On veut connaître la position relative de S par rapport à son plan tangent P au point $\big(a, f(a)\big)$.

Proposition 10 : Notons $\delta(h)$ la différence d'altitude entre S et P au point $a + h$. En utilisant la formule de Taylor-Young, on a

$$\delta(h) = \frac{1}{2}d^2 f(a)(h, h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$

Proposition 11 : Le signe de $\delta(h)$ dépend de la signature de $d^2 f(a)$.

Figure 12 : Annexe 2 (Représentation des 3 cas possibles)

II. Comportement global ...

1. ... des fonctions d'une variable réelle

Théorème 13 : (Taylor-Lagrange) Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ telle que $f^{(k+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$

Application 14 : (théorème des accroissements finis) Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Figure 15 : Annexe 3 (Illustration du théorème des accroissements finis)

Proposition 16 : [G]106 Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante à valeurs positives telle que $f^{(n)}(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. ... des fonctions de plusieurs variables dans un espace vectoriel normé

Théorème 17 : (Taylor-Lagrange avec reste intégral) Soient $a, h \in U$. Si $f: U \to E$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U et si $[a, a+h] \subset U$, alors

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)h + \cdots + \frac{1}{k!} d^{(k)} f(a)(h, \dots, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{(k+1)} f(a+th)(h, \dots, h)dt$$

Proposition 18 : (lemme d'Hadamard) Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Alors on peut écrire

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Si de plus $df(0) = 0$, alors on peut écrire

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\le i,j\le n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

où pour tout (i,j), $h_{ij}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

DEV 1a Lemme 19 : Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe V un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1\big(V, GL_n(\mathbb{R})\big)$ tels que $\forall A \in V$

$$A = \rho(A)^t A_0 \rho(A)$$

DEV 1b Lemme 20 : (Morse à n variables) Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

où $\varphi(x) = (u_1, \dots, u_n)$

Remarque 21 : On retrouve immédiatement grâce au lemme de Morse les résultats de l'étude locale d'une surface.

Théorème 22 : (inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $f: U \to E$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U. Pour tout K compact convexe contenu dans U, il existe $C > 0$ telle que pour tout $a \in K$ et $a + h \in K$

$$\left\| f(a+h) - f(a) - df(a)h - \cdots - \frac{1}{k!} d^{(k)} f(a)(h, \dots, h) \right\| \le C\|h\|^{k+1}$$

Figure 23 : Annexe 4 (Géométrie de la formule de Taylor-Lagrange)

Application 24 :

1) $\forall x \ge 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
2) $\forall x \ge 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - e^x \le x$

Proposition 25 : (méthode des rectangles) Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. On associe la suite définie par $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$S_k(f) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right)$$

Alors $S_k(f) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2k}\big(f(1)-f(0)\big) + \frac{1}{12k^2}\big(f'(1)-f'(0)\big) + O\left(\frac{1}{k^3}\right)$ et $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{k\to+\infty} S_k(f)$.

III. Utilisation des formules de Taylor en probabilité et analyse

1. Etude des fonctions convexes

Définition 26 : Soit U un ouvert convexe de E et $f: U \to \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction convexe sur U si pour tous $x, y \in U$, pour tout $t \in [0,1]$

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Proposition 27 : Soit U un ouvert convexe de E et $f: U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. Alors f est convexe sur U si, et seulement si, pour tous $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) \geq df(x)(y-x)$$

ie le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 28 : Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur U. Alors f est une fonction convexe sur U si, et seulement si, d^2f est une forme quadratique positive en tout point.

2. Convergence de suite de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour X une variable aléatoire réelle, on note φ_X sa fonction caractéristique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

Proposition 29 : Si X admet un moment d'ordre p, alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^p$ et $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p\mathbb{E}(X^p)$.

Théorème 30 : (Lévy) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles. Si X est une variable aléatoire réelle, alors on a équivalence entre :

(1) X_n converge en loi vers X
(2) φ_{X_n} converge simplement vers φ_X

DEV 2a Lemme 31 : Soit $(z_n) \subset \mathbb{C}$ de limite $z \in \mathbb{C}$. Alors $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \to e^z$ lorsque $n \to +\infty$.

DEV 2b Théorème 32 : (central limite) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées et admettant un moment d'ordre 2. Notons $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 = Var(X_1)$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Vitesse de convergence de la méthode de Newton

Soit $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ avec $c < d$. On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. On considère la suite récurrente

$$x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0$$

avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Proposition 33 : f a un unique zéro a et vérifie $\forall x \in [c,d]$, $\exists z \in [a,x]$ tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

Corollaire 34 : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c,d]$

$$|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$$

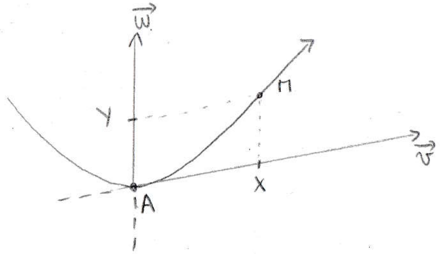
et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F.

Proposition 35 : Pour chaque $x_0 \in I$, la suite (x_n) a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.

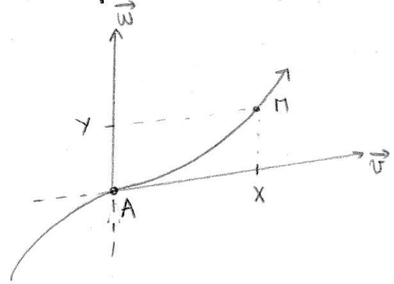
Figure 36 : Annexe 5 (Illustration de la méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$)

Annexe 1 : Représentation des 4 cas possibles.

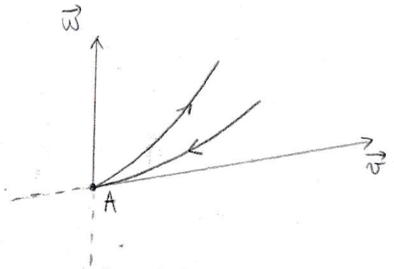
p impair, q pair



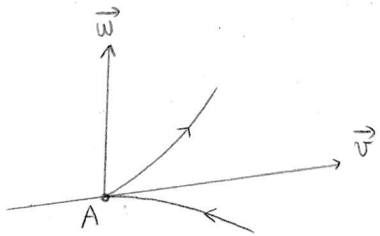
p impair, q impair



p pair, q pair

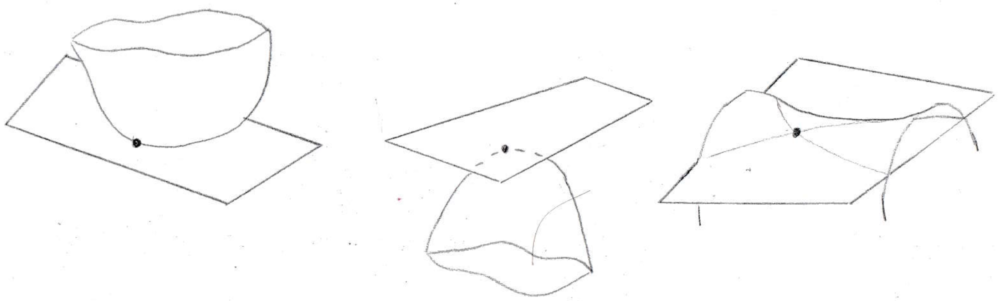


p pair, q impair

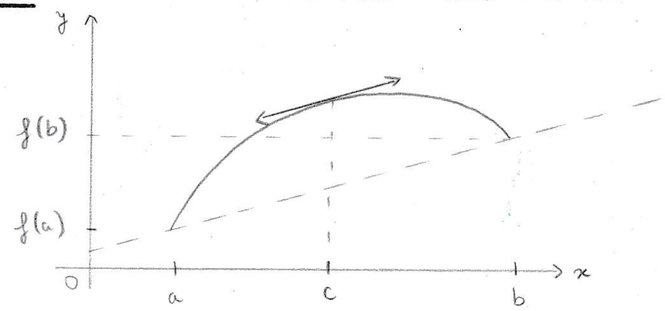


Annexe 2 : Représentation des 3 cas possibles

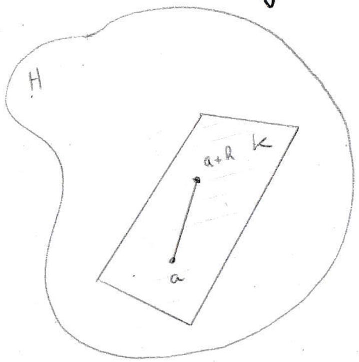
$\text{sign}(d^2f(a)) = (2,0)$ $\text{sign}(d^2f(a)) = (0,2)$ $\text{sign}(d^2f(a)) = (1,1)$



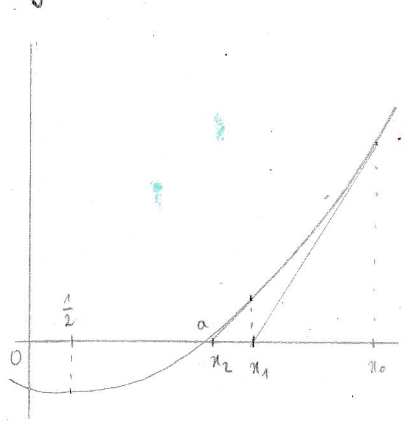
Annexe 3 : Illustration du théorème des accroissements finis



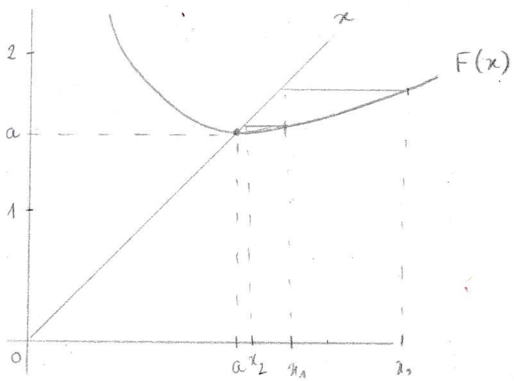
Annexe 4 : Géométrie de l'inégalité de Taylor-Lagrange



Annexe 5 : Illustration de la méthode de Newton pour $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$



$f(x) = x^2 - x - 1$



$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2+1}{2x-1}$$